TITLE:
円分体の整数環のK群について(代数的整数論とその周辺)

AUTHOR(S):
青木, 美穂

CITATION:
青木, 美穂. 円分体の整数環のK群について(代数的整数論とその周辺). 数理解析研究所講究録 2006, 1521: 185-195

ISSUE DATE:
2006-10

URL:
http://hdl.handle.net/2433/58781

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
1521 巻 2006 年 185-195

円分体の整数環の K 群について

東京工業大学 大学院理工学研究科　数学専攻　青木　美穂　(Miho Aoki)
Department of Mathematics, School of Science and Engineering,
Tokyo Institute of Technology

1 Introduction

L を有限次代数体, $\mathcal{O}_L$ を L の整数環とする. 任意の整数 $n(\geq 0)$ に対し, $K_n(\mathcal{O}_L)$ を Quillen によって定義された K 群とする. 特に, $K_0(\mathcal{O}_L) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Cl}_L$ (Cl_L は L のイデアル類群), $K_1(\mathcal{O}_L) \simeq \mathcal{O}_L^\times$ となることが知られており, 代数体の整数環の高次 K 群は代数的整数論において重要なイデアル類群や単数群の一般化と思うことが出来る. 本稿では, この高次 K 群の構造に関して岩澤理論からアプローチした結果について紹介する. 大まかな結果は次の二つになる.
p を奇素数, $m(\geq 0)$ を整数とする.

主結果

I. 円分体 $L = \mathbb{Q}(\mu_{p^{m+1}})$ に対し, $K_n(\mathcal{O}_L) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ のガロア群の作用込みの構造に関する予想を定式化した.

II. $L = \mathbb{Q}$ 又は $\mathbb{Q}(\mu_{p^{m+1}})$ に対し, エタール コホモロジー群 $H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_L[1/p]), \mathbb{Z}_p(i))$ $(i \geq 2)$ の位数の明示式を円単数又はガウス和を用いて与えた.

Remarks.
(1) $L = \mathbb{Q}$ (すなわち, $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}$) の場合の $K_n(\mathcal{O}_L)$ の構造に関する予想 (Conjecture 4) は, Kurihara, Mitchell 両氏により独立に与えられている ([10, Conjecture 3.2] [14, 6.15]).
(2) K 群とエタール コホモロジー群の間の自然な写像 (Chern map) の同型 (Conjecture 3) と Kubota-Leopoldt の p 進 L 関数の整数点の値に関する予想 (Conjecture 2) を仮定すると, I の予想は, Vandiver 予想 (Conjecture 1) と同値になる.
(3) 偶数次 K 群の有限性 (アーベル群として有限生成であることを Quillen[16] が示し, $\mathbb{Z}$-ランクを Borel[2] が決定している) と Chern map の全射性より, 偶数次のエタール コホモロジー群 $H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_L[1/p]), \mathbb{Z}_p(i))$ $(i \geq 2)$ は有限群である. また, Quillen-Lichtenbaum 予想を認めれば, II の結果は偶数次 K 群の位数の明示式を与えたことになる.
(4) 表記を簡単にすため, 主結果は p 冪分体で与えているが, 少なくとも以下のようなアーベル体 L に対しても同様に証明できる : $L = K$ 又は $L = K(\mu_{p^{m+1}})$, ただし, K は $p \nmid [K : \mathbb{Q}]$ かつ $K/\mathbb{Q}$ で p は不分解となる $\mathbb{Q}$ 上のアーベル拡大.

このセクションの終わりに上で出てきたいくつかの予想について紹介する. p を奇素数とし, $F = \mathbb{Q}(\mu_p)$ とおく. また任意の整数 $m \geq 0$ に対し, $F_m = \mathbb{Q}(\mu_{p^{m+1}})$ とおく. また, それらの合成体を F_∞ とおく, つまり $F_\infty = \cup_{m\geq 0} F_m$. 任意のアーベル群 G に対し, $\widehat{G}$ を G の指標群とする. $F_\infty/\mathbb{Q}$, $F_m/\mathbb{Q}$ のガロア群はそれぞれ, $\mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}) \simeq \Delta \times \Gamma$, $\mathrm{Gal}(F_m/\mathbb{Q}) \simeq \Delta \times \Gamma_m$, $\Delta = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$, $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$, $\Gamma_m = \mathrm{Gal}(F_m/F)$ と分解される.

Conjecture 1 (Vandiver) 体 $\mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})$ の類数は p で割れない.

Conjecture 2 ($\mathrm{C}_{m,i}$) $m \geq 0$, i を整数とする. 任意の偶指標 $\chi \in \widehat{\Delta}$ と任意の指標 $\psi \in \widehat{\Gamma}_m$ に対し, $L_p(1-i, \chi\psi) \neq 0$.

任意の整数 $m \geq 0$, i と任意の指標 $\psi \in \widehat{\Gamma}_m$ に対し, $L_p(1-i,\psi) \neq 0$ 及び, 任意の整数 $m \geq 0$, $i \geq 0$ に対する ($\mathrm{C}_{m,i}$) は常に成立する ($\mathrm{C}_{m,i}$ ($i \geq 1$) に関しては, [20, Theorem 5.11] を参照, $\mathrm{C}_{m,0}$ は Leopoldt 予想の帰結である [3]).

Conjecture 3 (Quillen – Lichtenbaum) 任意の代数体 L と整数 $i \geq 2$ に対し, 以下の *p-adic Chern maps* は自然な同型を与える.

$$(1)\ K_{2i-1}(\mathcal{O}_L) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \to H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_L[1/p]), \mathbb{Z}_p(i))$$

$$(2)\ K_{2i-2}(\mathcal{O}_L) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \to H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_L[1/p]), \mathbb{Z}_p(i))$$

この写像の全射性は, $2 \leq i \leq p$ の場合は Soulé [19] が, 一般の場合は Dwyer-Friedlander [4] が示している. また写像 (2) が split することが $L(\mu_p)/\mathbb{Q}$ において p は不分解という仮定の下, Kurihara[10] により, 一般の場合は Kahn [8] によって示されている. また, 最近の Voevodsky, Rost らの結果により, Conjecture 3 は正しいと認識されているが, 文献は今のところ無い.

整数環 $\mathbb{Z}$ の K 群で構造が求められているもの (現時点で論文が出ているもの) は, $K_0(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $K_1(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $K_2(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (Milnor [13]), $K_3(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/48\mathbb{Z}$ (Lee-Szczarba [11]), $K_4(\mathbb{Z}) = 0$ (Rognes [17]), $K_5(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ (Elbaz Vincent-Gangl-Soulé [5]) である. $\mathbb{Z}$ の K 群に関しては以下の予想がある.

Conjecture 4 (Kurihara [10, Conjecture 3.2], Mitchell [14, 6.15]) 任意の整数 $n \geq 0$ に対し, $\mathbb{Z}$ の K 群の構造は以下で与えられる.

$$K_{4n}(\mathbb{Z}) \simeq' 0 \qquad (n \geq 1)$$

$$K_{4n+1}(\mathbb{Z}) \simeq' \mathbb{Z} \qquad (n \geq 1)$$

$$K_{4n+2}(\mathbb{Z}) \simeq' \mathbb{Z}/N_{2n+2}\mathbb{Z}$$

$$K_{4n+3}(\mathbb{Z}) \simeq' \mathbb{Z}/D_{2n+2}\mathbb{Z}$$

ここで偶数 k に対し, 正の整数 N_k, D_k は等式 $\zeta(1-k) = -\frac{B_k}{k} = (-1)^{k/2}\frac{N_k}{D_k}$ で与えられる (ただし N_k と D_k は互いに素になるようにとる). *Bernoulli* 数 B_k は [10] 及び [20] と同じ表記法を用いている. また '$\simeq'$' は *2-torsion groups* を無視した同型を表している.

Conjecture 4 は, Conjecture 3 の仮定の下, Conjecture 1 と同値になることが示される ([10,14] 及び [1]).

2 主結果 I について

この節では, Conjecture 4 の類似の $\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}]$ の K 群の構造に関する予想を述べ, それが Conjecture 2 と Conjecture 3 の仮定の下, Conjecture 1 と同値になることを示す. 始めに記号の準備をする.

$\tilde{\kappa}$:Gal$(F_\infty/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}_p^\times$ を円分指標とする, すなわち任意の $\tau \in$Gal$(F_\infty/\mathbb{Q})$ と $\zeta \in \cup_{m\geq 0}\mu_{p^{m+1}}$ に対し, $\zeta^\tau = \zeta^{\tilde{\kappa}(\tau)}$ を満たすものとする. 同型 : Gal$(F_\infty/\mathbb{Q}) \simeq \Delta \times \Gamma$ により, 円分指標 $\tilde{\kappa}$ は次のように分解される.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathrm{Gal}}(F_\infty/\mathbb{Q}) & \simeq & \widehat{\Delta} \times \widehat{\Gamma} \\ \\ \tilde{\kappa} & = & \omega \times \kappa \end{array}$$

指標 κ は同型 $\kappa : \Gamma \simeq 1 + p\mathbb{Z}_p$ を与える. Γ の位相的生成元 γ を $\kappa(\gamma) = 1 + p$ となるようにとる. 対応 : $\gamma \mapsto 1 + T$ により, 同型 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \simeq \mathbb{Z}_p[[T]]$ を得る. この環を Λ とおく : $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \simeq \mathbb{Z}_p[[T]]$. 任意の指標 $\chi \in \widehat{\Delta}$ に対し, e_χ を idempotent とする, つまり $e_\chi = \dfrac{1}{p-1}\displaystyle\sum_{\sigma\in\Delta} \chi^{-1}(\sigma)\sigma$. 任意の偶指標 $\chi(\neq 1) \in \widehat{\Delta}$ と任意の指標 $\psi \in \widehat{\Gamma}_m$ に対し, $f_\chi(T) \in \Lambda$ を以下の等式を満たす冪級数とする : $L_p(s, \chi\psi) = f_\chi(\zeta_\psi\kappa(\gamma)^s - 1) = f_\chi(\zeta_\psi(1+p)^s - 1)$, ただし $\zeta_\psi = \psi(1+p)^{-1} \in \mu_{p^m}$. 任意の $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})]]$-加群 V と任意の整数 n に対し, $V(n)$ を Tate twist とする. 以下が $F_m = \mathbb{Q}(\mu_{p^{m+1}})$ の整数環 $\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}]$ の K 群の構造に関する予想である.

Conjecture 5 $m \geq 0$ を整数とする. 任意の整数 $i(\geq 2)$, j に対し, $\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}]$ の K 群の構造は以下で与えられる.

$$(K_{2i-2}(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}]) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^{\omega^j} \simeq \begin{cases} 0 & \text{if } i \not\equiv j \pmod 2 \text{ or } i \equiv j \pmod{p-1}, \\ \\ \left(\Lambda/(f_{\omega^{i-j}}, g_{1-i}^{(m)})e_{\omega^{j-i+1}}\right)(i-1) & \\ \qquad \text{if } i \equiv j \pmod 2 \text{ and } i \not\equiv j \pmod{p-1}, \end{cases}$$

$$(K_{2i-1}(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}]) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^{\omega^j} \simeq \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda/(g_i^{(m)})e_{\omega^{i-j}}, \mathbb{Z}_p(i)) & \text{if } i \not\equiv j \pmod 2, \\ \\ \mu_{D_{p,i,j}}^{\otimes i} & \text{if } i \equiv j \pmod 2, \end{cases}$$

現れている記号の説明をする. まず $g_i^{(m)}$ は次のような $\Lambda(\simeq \mathbb{Z}_p[[T]])$ の元である : $g_i^{(m)} = \gamma^{p^m} - \kappa^i(\gamma^{p^m})$ $(= (1+T)^{p^m} - (1+p)^{ip^m})$. $\left(\Lambda/(f_{\omega^{i-j}}, g_{1-i}^{(m)})e_{\omega^{j-i+1}}\right)(i-1)$ は有限群であり その位数は以下で定義される $N_{p,i,j}$ で与えられる. $i \equiv j \pmod 2$ を満たす整数の組 i, j に対し, p の冪 $N_{p,i,j}$, $D_{p,i,j}$ を次のように定義する. まず, $\mathcal{N}_{p,i,j}$ と $\mathcal{D}_{p,i,j}$ を以下で定義する.

$$\prod_{\psi\in\widehat{\Gamma}_m} L_p(1-i, \omega^{i-j}\psi) \sim_p \prod_{\psi\in\widehat{\Gamma}_m} (B_{i,\omega^{-j}\psi}/i) = \frac{\mathcal{N}_{p,i,j}}{\mathcal{D}_{p,i,j}} \quad \in \mathbb{Q}_p$$

ただし, $\mathcal{N}_{p,i,j}$, $\mathcal{D}_{p,i,j}$ は $\mathbb{Z}_p$ の元で $v_p(\mathcal{N}_{p,i,j}) = 0$ 又は $v_p(\mathcal{D}_{p,i,j}) = 0$ が成り立つようにとる. これらのとり方は $\mathbb{Z}_p^\times$ の元の差があり一意的ではないが, それらの p 進付置は一意的に決まる. そこで, p の冪 $N_{p,i,j}$ と $D_{p,i,j}$ をそれぞれ $\mathcal{N}_{p,i,j}$, $\mathcal{D}_{p,i,j}$ と p 進付置が等しくなるようにとる. また, 任意の $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ 加群 V に対し, V^{ω^j} をその ω^j-*component* とする, すなわち $V^{\omega^j} = e_{\omega^j}V$.

この conjecture と, 前節の終わりに挙げた Conjecture 1,2,3 の関係は以下で与えられる.

Theorem 6 *Conjecture 2* ($\mathrm{C}_{m,1-i}$) と *Conjecture 3* の仮定の下, 組 (m,i) に対する *Conjecture 5* と *Conjecture 1* は同値になる.

この定理の証明を述べる前に, 偶数次のエタール コホモロジー群と岩澤加群との関係を述べた二つの lemma について述べる. 整数 $m \geq 0$ に対し, A_m を $F_m = \mathbb{Q}(\mu_{p^{m+1}})$ のイデアル類群の p-primary component とし, $X = \varprojlim A_m$ とおく (射影極限は体のノルム写像に関してとる).

Lemma 7 任意の整数 $m \geq 0$, i に対し, 以下の自然な同型が成り立つ.

(1) $H^2_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p]), \mathbb{Z}_p(i)) \simeq X(i-1)_{\mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})}$.
(2) $H^2_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}, 1/p]), \mathbb{Z}_p(i)) \simeq X(i-1)_{\Gamma^{p^m}}$.

Proof. L を代数体とすると, localisation map

$$\varphi : H^2_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}\mathcal{O}_L[1/p], \mathbb{Z}_p(i)) \to \oplus_{v|p} H^2(L_v, \mathbb{Z}_p(i)) \simeq \oplus_{v|p}\mathbb{Z}_p(i-1)$$

(v は p を割る L の素イデアルを動く) の像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ は, Hasse の原理より $\mathrm{Ker}\{\sum : \oplus_{v|p}\mathbb{Z}_p(i-1) \to \mathbb{Z}_p(i-1)\}$ (写像 $\sum$ は $(a_v)_v \mapsto \sum_v a_v$ で与えられるもの) に含まれることが分かる. よって, $L = \mathbb{Q}$ 又は $\mathbb{Q}(\mu_{p^{m+1}})$ の場合は p の上の素イデアルは唯一であるから, $\mathrm{Ker}\{\sum : \oplus_{v|p}\mathbb{Z}_p(i-1) \to \mathbb{Z}_p(i-1)\} = 0$ であり, $\mathrm{Im}\,\varphi = 0$ となる. 一方, Schneider の結果を用いると, $\ker\varphi \simeq X(i-1)_{G_\infty}$ となることが分かる. ここで, $G_\infty = \mathrm{Gal}(L_\infty/L)$, $L_\infty = \cup_{m\geq 0} L(\mu_{p^{m+1}})$ である. ([18, §6] [9, 3.1 and Remark (4) after Corollary 4.4] 参照). 以上のことを合わせると lemma の主張が得られる. □

次にこの lemma を以後使いやすくするために, 少し書き換えておく. 次のような岩澤加群 X の商を考える.

Definition 8 整数 i, j, $m \geq 0$ に対し,

$$X^{(m)}_{i,j} =_{\mathrm{def}} \quad X^{\omega^j}/(\gamma^{p^m} - \kappa^{1-i}(\gamma^{p^m}))X^{\omega^j}$$

とおく.

Lemma 7 を $X^{(m)}_{i,j}$ を用いて書き換えると以下のようになる.

Lemma 9 任意の整数 $m \geq 0$, i, j に対し, 以下の自然な同型が成り立つ.

(1) $H^2_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p]), \mathbb{Z}_p(i)) \simeq X^{(0)}_{i,1-i}(i-1)$.
(2) $H^2_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}, 1/p]), \mathbb{Z}_p(i))^{\omega^j} \simeq X^{(m)}_{i,j-i+1}(i-1)$,

(2) の j を $0 \leq j \leq p-2$ の範囲で動かすことにより,

$$H^2_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}, 1/p]), \mathbb{Z}_p(i)) \simeq \bigoplus_{j=0}^{p-2} X^{(m)}_{i,j}(i-1).$$

Proof. Lemma 7 と一般に $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})]]$-加群 V と指標 $\chi \in \widehat{\Delta}$ に対して成り立つ以下の事実を用いればよい.

$$(V(i-1))^\chi = (V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(i-1))^\chi = V^{\chi\omega^{1-i}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(i-1) = V^{\chi\omega^{1-i}}(i-1)$$

および

$$(V(i-1))_{\Gamma^{p^m}} = (V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(i-1))_{\Gamma^{p^m}} = V/(\gamma^{p^m} - \kappa^{1-i}(\gamma^{p^m}))V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(i-1)$$
$$= \left(V/(\gamma^{p^m} - \kappa^{1-i}(\gamma^{p^m}))V\right)(i-1). \ \square$$

次に Theorem 6 の証明を述べる.

Proof of Theorem 6. 始めに, 以下の lemma を示す.

Lemma 10 *Conjecture 2* ($C_{m,1-i}$) と *Conjecture 3* を仮定すると以下が成り立つ.

$$(K_{2i-1}(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}]) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^{\omega^j} \simeq \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda/(g_i^{(m)})e_{\omega^{i-j}}, \mathbb{Z}_p(i)) & \text{if } i \not\equiv j \pmod 2, \\ \mu_{D_{p,i,j}}^{\otimes i} & \text{if } i \equiv j \pmod 2, \end{cases}$$

$$|(K_{2i-2}(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}]) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^{\omega^j}| = N_{p,i,j} \qquad \text{if } i \equiv j \pmod 2.$$

まず Conjecture 3 より, 上の左辺の K 群はエタール コホモロジー群

$$H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}, 1/p]), \mathbb{Z}_p(i))^{\omega^j}, \quad H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}, 1/p]), \mathbb{Z}_p(i))^{\omega^j}$$

に置き換えられる.

後半の偶数次に関する主張:

$$|H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}, 1/p]), \mathbb{Z}_p(i))^{\omega^j}| = N_{p,i,j} \qquad \text{if } i \equiv j \pmod 2.$$

は岩澤主予想から導かれる (後の Theorem 14 参照, 証明は難しくない).

前半の奇数次に関する主張を示す. $H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}, 1/p]), \mathbb{Z}_p(i))$ の $\mathbb{Z}_p$-torsion part は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} \mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}, 1/p]), \mathbb{Z}_p(i)) &\simeq H^0_{\acute{e}t}(Spec(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}, 1/p]), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \\ &\simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^{\mathrm{Gal}(F_\infty/F_m)}. \end{aligned}$$

前半の同型については, 例えば [9,Lemma 2.2 (1)] を参照. この同型から, 次の同型が導かれる.

$$\begin{aligned} \mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p} H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}, 1/p]), \mathbb{Z}_p(i))^{\omega^j} &\simeq \left((\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^{\mathrm{Gal}(F_\infty/F_m)}\right)^{\omega^j} \\ &\simeq \begin{cases} 0 & \text{if } i \not\equiv j \pmod 2, \\ \mu_{D_{p,i,j}}^{\otimes i} & \text{if } i \equiv j \pmod 2. \end{cases} \end{aligned}$$

ここで最後の同型は, $\mu_{p^\nu}^{\otimes i}$ の元 $\zeta_{p^\nu}^{\otimes i}$ が $\mathrm{Gal}(F_\infty/F_m)$ の作用で変わらないための必要十分条件が $p^\nu | ip^{m+1}$ であることと, $i-j \equiv 0 \pmod{p-1}$ のときは, $D_{p,i,j} \sim_p \prod_{\psi \in \widehat{\Gamma}_m} \left(1 - \dfrac{1+p}{\zeta_\psi (1+p)^{1-i}}\right)$

$=\prod_{\psi\in\widehat{\Gamma}_m}(1-\zeta_\psi(1+p)^i)=1-(1+p)^{ip^m}\sim_p ip^{m+1}$ となることを用いている ([20, Theorem 7.10 and Lemma 7.12] 参照).

次に $H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}},1/p]),\mathbb{Z}_p(i))$ の $\mathbb{Z}_p$-free part をみる. M_∞ を F_∞ 上の p の外不分岐最大アーベル prp-p-拡大とし, $\mathfrak{X}:=\mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty)$ とおく. このとき同型

$$\mathrm{fr}_{\mathbb{Z}_p}H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathbb{Z}([\mu_{p^{m+1}},1/p]),\mathbb{Z}_p(i))\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(F_\infty/F_m)}(\mathfrak{X},\mathbb{Z}_p(i))$$

が成り立つ ([9, Lemma 2.2 (2)] 参照). よって, 以下の同型が導かれる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{fr}_{\mathbb{Z}_p}H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathbb{Z}([\mu_{p^{m+1}},1/p]),\mathbb{Z}_p(i))^{\omega^j} &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(F_\infty/F_m)}(\mathfrak{X},\mathbb{Z}_p(i))^{\omega^j}\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}/g_i^{(m)}\mathfrak{X},\mathbb{Z}_p(i))^{\omega^j}\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathfrak{X}^{\omega^{i-j}}/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^{\omega^{i-j}},\mathbb{Z}_p(i))\\
&\simeq \begin{cases} 0 & \text{if } i\equiv j \pmod 2\\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda/(g_i^{(m)})e_{\omega^{i-j}},\mathbb{Z}_p(i)) & \text{if } i\not\equiv j \pmod 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

最後の同型は以下の事実を用いる. まず $i\equiv j \pmod 2$ の場合は $\mathfrak{X}^{\omega^{i-j}}/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^{\omega^{i-j}}$ は有限群になる. また $i\not\equiv j \pmod 2$ の場合は Conjecture 2 ($\mathrm{C}_{m,1-i}$) と類体論を用いて導かれる以下の完全列を使う.

$$0\to\Lambda/(g_i^{(m)})e_{\omega^{i-j}}\to\mathfrak{X}^{\omega^{i-j}}/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^{\omega^{i-j}}\to X^{\omega^{i-j}}/g_i^{(m)}X^{\omega^{i-j}}\to 0$$

$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{X}/g_i^{(m)}\mathfrak{X}=\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(F_\infty/F_m)}(\mathfrak{X},\mathbb{Z}_p(i))=\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}H^1_{\acute{e}t}(Spec(\mathbb{Z}([\mu_{p^{m+1}},1/p]),\mathbb{Z}_p(i))$ $=\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(K_{2i-1}(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}])\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)=p^m(p-1)/2$ より, 上の完全列から, $\mathrm{fr}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{X}^{\omega^{i-j}}/g_i^{(m)}\mathfrak{X}^{\omega^{i-j}}\simeq\Lambda/(g_i^{(m)})e_{\omega^{i-j}}$ が従う. これで Lemma 10 が示された.

次に組 (m,i) に対する Conjecture 5 と Conjecture 1 が同値になることを示す. まず, 以下の同値性に注意する.

$$\begin{aligned}
\text{Conjecture 1} &\Leftrightarrow \text{任意の偶数 } j \text{ に対し, } X^{\omega^j}=0\\
&\Leftrightarrow i\not\equiv j \pmod 2 \text{ を満たす任意の整数 } j \text{ に対し,}\\
&\qquad (K_{2i-2}(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}])\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)^{\omega^j}=0.
\end{aligned}$$

二番目の同値性は, Conjecture 3 の仮定と Lemma 9 (2) を用いた. また, 上の同値な主張が成り立つと, reflection theorem を用いることにより ([20, §10.2] 参照), 任意の奇数 j に対しても, X^{ω^j} は Λ-加群として一つの元で生成されることが分かる. よって, $i\equiv j \pmod 2$ かつ $i\not\equiv j \pmod{p-1}$ を満たす任意の整数 j に対し, 次の全射を得る ($i\equiv j \pmod{p-1}$ のときは, $X^{(m)}_{i,j-i+1}$ は常に 0 である).

$$\Lambda/(f_{\omega^{i-j}},g_{1-i}^{(m)})e_{\omega^{j-i+1}}\twoheadrightarrow X^{\omega^{j-i+1}}/g_{1-i}^{(m)}X^{\omega^{j-i+1}}=X^{(m)}_{i,j-i+1}$$

ここで上に現れる二つの群は共に位数が $N_{p,i,j}$ であることが簡単に示せる. よって同型 $(K_{2i-2}(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m+1}}])\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)^{\omega^j}\simeq X^{(m)}_{i,j-i+1}(i-1)\simeq\left(\Lambda/(f_{\omega^{i-j}},g_{1-i}^{(m)})e_{\omega^{j-i+1}}\right)(i-1)$ を得る. 以上で Theorem 6 の主張が示せた. □

3 ある岩澤加群の商の位数に関する結果について

この商では, Definition 8 で定義された加群 $X_{i,j}^{(m)}$ の位数に関する結果を述べる. j が奇数の場合は岩澤主予想 (Mazur-Wiles の定理 [12]) の系として $X_{i,j}^{(m)}$ の位数が円単数を用いて表せることが, 示せる. j が偶数の場合もガウス和で表せることが Nguyen Quang Do の結果や類体論を用いることにより示すことができた. 始めに, いくつか記号の準備をする.

前セクションまでの記号は全てそのまま用いる. 特に $F=\mathbb{Q}(\mu_p)$ である.

Definition 11 $i,\ j,\ m\geq 0$ を整数とする. 任意の $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})]]$-加群 V に対し, κ_m^i-*component* を以下で定義する.

$$V^{\kappa_m^i}=\{\ v\in V\mid \gamma^{p^m}v=\kappa^i(\gamma^{p^m})v\ \}$$

E_m を体 F_m の単数群, その部分群 $E_m^{(1)}$ を $E_m^{(1)}=\{\varepsilon\in E_m\mid \varepsilon\equiv 1 \pmod{(1-\zeta_{p^{m+1}})}\}$ で定義する. また, $\mathcal{U}_m$ を局所体 $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^{m+1}})$ の単数 u で $u\equiv 1 \pmod{1-\zeta_{p^{m+1}}}$ を満たすもの全体で生成される群とする.

Definition 12 円単数群 $\mathcal{C}_m$ を以下で定義する.

$$\mathcal{C}_m=\langle\{\ \pm\zeta_{p^{m+1}},1-\zeta_{p^{m+1}}^a\mid 1\leq a\leq p^{m+1}-1\ \}\rangle\cap E_m.$$

F_m の Stickelberger 元 θ_m と Stickelberger イデアル I_m を以下で定義する.

$$\theta_m=\frac{1}{p^{m+1}}\sum_{\substack{a=0\\(a,p)=1}}^{p^{m+1}}a\sigma_a^{-1}\in\mathbb{Q}_p[\mathrm{Gal}(F_m/\mathbb{Q})]$$

$$I_m=\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(F_m/\mathbb{Q})]\cap\theta_m\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(F_m/\mathbb{Q})]$$

Definition 13 $m_0,m\ (m_0\leq m)$, i を整数とする. ガウス和で生成される群 $\mathcal{G}_{m,i}^{(m_0)}$ を以下で定義する.

$$\mathcal{G}_{m,i}^{(m_0)}=\langle\{\ \tau_\lambda=\sum_{a=1}^{\ell-1}\chi_\lambda(a)\zeta_\ell^a\mid\lambda:\textit{prime ideal of } F_m \textit{ which divides a prime number } \ell$$
$$\textit{satisfying } \ell\equiv 1 \pmod{p^{m+1}} \text{ and } \tau_\lambda^{g_i^{(m_0)}}\in I_m^-(F_m(\mu_\ell)^\times\otimes\mathbb{Z}_p)\ \}\rangle_{\mathbb{Z}_p}$$

ここで, 指標 $\chi_\lambda:(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times\to\mu_{p^{m+1}}$ は, $\chi_\lambda(a)\equiv a^{-(\ell-1)/p^{m+1}} \pmod{\lambda}$ で与えられるものであり, 記号 "$\langle\{*\}\rangle_{\mathbb{Z}_p}$" は $\mathbb{Z}_p$-加群として $\{*\}$ で生成されることを意味する. また, $g_i^{(m_0)}=\gamma^{p^{m_0}}-\kappa^i(\gamma^{p^{m_0}})(=(1+T)^{p^{m_0}}-(1+p)^{ip^{m_0}})\in\Lambda(\simeq\mathbb{Z}_p[[T]])$ である.

$\overline{\mathcal{C}}_m$ を $\mathcal{U}_m$ における $\mathcal{C}_m\cap E_m^{(1)}$ の位相的閉包, $\overline{\mathcal{G}}_{m,i}^{(m_0)}$ を $\mathcal{G}_{m,i}^{(m_0)}\cap(F_m^\times\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)$ の $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^{m+1}})$ における像とする ($\overline{\mathcal{G}}_{m,i}^{(m_0)}\subset\mathcal{U}_m$ である).

奇数 j に対する $X_{i,j}^{(m)}$ の位数に関する結果は, 以下のとおりである.

Theorem 14 (Mazur – Wiles [12], Iwasawa [7]) $m_0\geq 0,\ i\geq 2$ を整数, j を $j\not\equiv 1 \pmod{p-1}$ をみたす奇数とする. $m_0,\ i,\ j$ に依存した定数 $C(m_0,i,j)$ が存在し, 任意の整数 $m\geq C(m_0,i,j)$ に対し, 次が成り立つ.

$$|X_{i,j}^{(m_0)}| = |(\mathcal{U}_m/\overline{\mathcal{C}}_m)^{\omega^{1-j}\kappa_{m_0}^i}| \sim_p \prod_{\psi\in\widehat{\Gamma}_{m_0}} L_p(1-i,\omega^{1-j}\psi) \sim_p \prod_{\psi\in\widehat{\Gamma}_{m_0}} (B_{i,\omega^{1-j-i}\psi}/i).$$

ここで, 記号 "$\sim_p$" は両辺の p 進付置が一致することを表す.

この定理は実際, 岩澤主予想 (Mazur-wiles の定理) と, Iwasawa による加群 $\mathcal{U}_m/\overline{\mathcal{C}}_m$ の構造に関する結果を用いて示すことが出来る. 次に偶数 j に対して, Theorem 14 の類似が成り立つことを主張する定理について述べる.

Theorem 15 $m_0 \geq 0$, $i \geq 2$ を整数, j を偶数とする. m_0, i, j に依存した定数 $C(m_0,i,j)$ が存在し, 任意の整数 $m \geq C(m_0,i,j)$ に対し, 次が成り立つ.

$$|X_{i,j}^{(m_0)}| = |(\mathcal{U}_m/\overline{\mathcal{G}}_{m,i}^{(m_0)} + I_m\mathcal{U}_m)^{\omega^{1-j}}||A_m^{\omega^{1-j}\kappa_{m_0}^i}|/|A_m^{\omega^{1-j}}|.$$

Proof. L_m/F_m を最大不分岐アーベル pro-p-拡大, M_m/F_m を p の外不分岐最大アーベル pro-p-拡大とし, Y_m =Gal(M_m/F_m), Z_m =Gal(M_m/L_m) とおく. $g_i^{(m_0)} = \gamma^{p^{m_0}} - \kappa^i(\gamma^{p^{m_0}})$ に対し, 類体論より成り立つ以下の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & Y_m^{\omega^{1-j}\kappa_{m_0}^i} & \to & A_m^{\omega^{1-j}\kappa_{m_0}^i} & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & Z_m^{\omega^{1-j}} & \to & & Y_m^{\omega^{1-j}} & \to & A_m^{\omega^{1-j}} & \to 0\\
 & \downarrow g_i^{(m_0)} & & & \downarrow g_i^{(m_0)} & & \downarrow g_i^{(m_0)} & \\
0 \to & Z_m^{\omega^{1-j}} & \to & & Y_m^{\omega^{1-j}} & \to & A_m^{\omega^{1-j}} & \to 0\\
 & \downarrow & & & & & & \\
\to & Z_m^{\omega^{1-j}}/g_i^{(m_0)}Z_m^{\omega^{1-j}} & & & & & &
\end{array}$$

この図式に関して以下の事実が成り立つ.

$\star$ $g_i^{(m_0)}$ を作用させる縦の左側の写像 $Z_m^{\omega^{1-j}} \to Z_m^{\omega^{1-j}}$ は単射になる. これは, $Z_m^{\omega^{1-j}} \simeq \Lambda/(\omega_m)$ $(\omega_m = \gamma^{p^m} - 1)$ であることと, ω_m と $g_i^{(m_0)}$ が互いに素であることから導かれる.

$\star$ 一番下の横の写像の像が, 加群の細かい計算により分かる. 実際

$$\mathrm{Im}\{A_m^{\omega^{1-j}\kappa_{m_0}^i} \to Z_m^{\omega^{1-j}}/g_i^{(m_0)}Z_m^{\omega^{1-j}}\} \simeq (\overline{\mathcal{G}}_{m,i}^{(m_0)} + I_m\mathcal{U}_m/I_m\mathcal{U}_m)^{\omega^{1-j}}$$

となることが分かる. この部分は定理の証明で最も重要な部分である. 詳細はスペースの都合があるので省かざるを得ないが, [1] を参照して頂きたい.

$\star$ Y_m の $\mathbb{Z}_p$-torsion に関する Nguyen Quang Do の結果 [15, Theorem 1.1] : $\mathrm{tor}_{\mathbb{Z}_p}(Y_m) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(X, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1))^{\Gamma^{p^m}}$ を用いると, $Y_m^{\omega^{1-j}\kappa_{m_0}^i} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(X_{i,j}^{(m_0)}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1))$ が十分大きい m に対して成り立つことが示せる.

以上の事実を用いると, 上の図式から蛇の補題を使うことにより, 以下の完全列が導かれる.

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(X_{i,j}^{(m_0)}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)) \to A_m^{\omega^{1-j}\kappa_{m_0}^i} \to (\mathcal{U}_m/I_m\mathcal{U}_m)^{\omega^{1-j}} \to (\mathcal{U}_m/\overline{\mathcal{G}}_{m,i}^{(m_0)} + I_m\mathcal{U}_m)^{\omega^{1-j}} \to 0$$

岩澤主予想を用いると, $|(\mathcal{U}_m/I_m\mathcal{U}_m)^{\omega^{1-j}}| = |A_m^{\omega^{1-j}}|$. が得られ, この完全列から定理の主張が導かれる. □

Theorem14, 15 の主張に現れる定数 $C(m_0,i,j)$ に関しては, 論文 [1] で具体的に扱っているので参照して頂きたい. また, Hachimori, Ichimura 両氏による $X_{0,j}^{(0)}$ (j は偶数) に関する類似の結果があることを注意しておく ([6]).

4 主結果IIについて

このセクションでは, Thorem14, 15 の応用として, 予想を何も仮定せずに, $L=\mathbb{Q}$ 又は $\mathbb{Q}(\mu_{p^{m+1}})$ に対し, エタール コホモロジー群 $H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathcal{O}_L[1/p]),\mathbb{Z}_p(i))$ の位数の明示式を円単数又はガウス和を用いて与える. これらの明示式は Conjecture 3 を仮定すると偶数次 K 群の位数を与えていることに注意する. 証明は前セクションの Lemma 9 と Theorem14, 15 を組み合わせるだけである.

Corollary 16 (= 主結果II) (1) $m_0\geq 0$, $i\geq 2$ を整数とし, i は $i\not\equiv 0 \pmod{p-1}$ を満たすとする. i に依存した定数 $C(i)$ が存在し, 任意の整数 $m\geq C(i)$ に対し, 次が成り立つ.

$$|H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathbb{Z}[1/p],\mathbb{Z}_p(i))| = \begin{cases} |(\mathcal{U}_m/\overline{\mathcal{C}}_m)^{\omega^i\kappa_0^i}| & \textit{if } i \textit{ is even,} \\[2ex] |(\mathcal{U}_m/\overline{\mathcal{G}}^{(0)}_{m,i}+I_m\mathcal{U}_m)^{\omega^i}|\dfrac{|A_m^{\omega^i\kappa_0^i}|}{|A_m^{\omega^i}|} & \textit{if } i \textit{ is odd.}\end{cases}$$

(2) $m_0\geq 0$, $i\geq 2$, j を $i-j\not\equiv 0 \pmod{p-1}$ を満たす整数とする. m_0, i, j に依存した定数 $C(m_0,i,j)$ が存在し, 任意の整数 $m\geq C(m_0,i,j)$ に対し, 次が成り立つ.

$$|H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m_0+1}},1/p],\mathbb{Z}_p(i))^{\omega^j}| = \begin{cases} |(\mathcal{U}_m/\overline{\mathcal{C}}_m)^{\omega^{i-j}\kappa_{m_0}^i}| & \textit{if } i\equiv j \pmod 2, \\[2ex] |(\mathcal{U}_m/\overline{\mathcal{G}}^{(m_0)}_{m,i}+I_m\mathcal{U}_m)^{\omega^{i-j}}|\dfrac{|A_m^{\omega^{i-j}\kappa_{m_0}^i}|}{|A_m^{\omega^{i-j}}|} & \\ & \textit{if } i\not\equiv j \pmod 2.\end{cases}$$

さらに p 進 L 関数の整数点での値が 0 にならないという仮定をつけると, 以下のようにイデアル類群の部分は p 進 L 関数の値や Bernoulli 数の値で書ける.

Corollary 17 (1) $m_0\geq 0$, $i\geq 2$ を整数とし, i は $i\not\equiv 0,1 \pmod{p-1}$ を満たすとする. $L_p(i,\omega^{1-i})\neq 0$ を仮定する. i に依存した定数 $C(i)$ が存在し, 任意の整数 $m\geq C(i)$ に対し, 次が成り立つ.

$$|H^2_{\acute{e}t}(Spec(\mathbb{Z}[1/p]),\mathbb{Z}_p(i))| \sim_p \begin{cases} L_p(1-i,\omega^i)\sim_p B_i/i & \textit{if } i \textit{ is even,} \\[2ex] |(\mathcal{U}_m/\overline{\mathcal{G}}^{(0)}_{m,i}+I_m\mathcal{U}_m)^{\omega^i}|\dfrac{L_p(i,\omega^{1-i})}{\prod_{\psi\in\widehat{\Gamma}_m}B_{1,\omega^{-i}\psi}} & \textit{if } i \textit{ is odd.}\end{cases}$$

(2) $m_0\geq 0$, $i\geq 2$, j を $i-j\not\equiv 0,1 \pmod{p-1}$ を満たす整数とする. 任意の指標 $\psi\in\widehat{\Gamma}_{m_0}$ に対し, $L_p(i,\omega^{j-i+1}\psi)\neq 0$ を仮定する. m_0, i, j に依存した定数 $C(m_0,i,j)$ が存在し, 任

意の整数 $m \geq C(m_0, i, j)$ に対し，次が成り立つ．

$$|H^2_{et}(Spec(\mathbb{Z}[\mu_{p^{m_0+1}}, 1/p]), \mathbb{Z}_p(i))^{\omega^j}| \sim_p \begin{cases} \prod_{\psi \in \widehat{\Gamma}_{m_0}} L_p(1-i, \omega^{i-j}\psi) \sim_p \prod_{\psi \in \widehat{\Gamma}_{m_0}} (B_{i,\omega^{-j}\psi}/i) \\ \qquad\qquad if\ i \equiv j \pmod 2, \\ |(\mathcal{U}_m/\overline{\mathcal{G}}^{(m_0)}_{m,i} + I_m\mathcal{U}_m)^{\omega^{i-j}}| \dfrac{\prod_{\psi \in \widehat{\Gamma}_{m_0}} L_p(i, \omega^{1-i+j}\psi)}{\prod_{\psi \in \widehat{\Gamma}_m} B_{1,\omega^{j-i}\psi}} \\ \qquad\qquad if\ i \not\equiv j \pmod 2. \end{cases}$$

最後に，Corollary 16, 17 と Conjecture 5 の関係について述べる．Conjecture 2 ($C_{m,1-i}$) と Conjecture 3 を仮定すると，以下の同値が成り立つ．

組 (m, i) に対する Conjecture 5

$\Leftrightarrow$ $i \not\equiv j \pmod 2$ を満たす任意の整数 j に対し，

$$|(\mathcal{U}_m/\overline{\mathcal{G}}^{(m_0)}_{m,i} + I_m\mathcal{U}_m)^{\omega^{i-j}}| \frac{|A_m^{\omega^{i-j}\kappa^i_{m_0}}|}{|A_m^{\omega^{i-j}}|} \sim_p 1.$$

$\Leftrightarrow$ $i \not\equiv j \pmod 2$ を満たす任意の整数 j に対し，

$$|(\mathcal{U}_m/\overline{\mathcal{G}}^{(m_0)}_{m,i} + I_m\mathcal{U}_m)^{\omega^{i-j}}| \frac{\prod_{\psi \in \widehat{\Gamma}_{m_0}} L_p(i, \omega^{1-i+j}\psi)}{\prod_{\psi \in \widehat{\Gamma}_m} B_{1,\omega^{j-i}\psi}} \sim_p 1.$$

References

[1] M. Aoki, On the K-groups of algebraic integers of cyclotomic fields, preprint.

[2] A. Borel, Cohomologie réele stable des groupes S-arithmétiques classiques, C.R. Acad. Sci. Paris **271** (1970), 1156-1158.

[3] A. Brumer, On the units of algebraic number fields, Mathematika **14** (1967), 121-124.

[4] W. Dwyer and E.Friedlander, Algebraic and étale K-theory, Trans.AMS **292** (1985), 247-280.

[5] P. Elbaz-Vincent, H.Gangle and C.Soulé, Quelques calculs de la cohomologie de $GL_N(\mathbb{Z})$ et de la K-théorie de $\mathbb{Z}$, C.R.Acad.Sci.Paris, Ser.I **335** (2002), 321-324.

[6] Y. Hachimori and H.Ichimura, Semi-local units modulo Gauss sums, Manuscripta Math. **95** (1998), 377-395.

[7] K. Iwasawa, On some modules in the theory of cyclotomic fields, J. Math. Soc. Japan **16** (1964), 42-82.

[8] B. Kahn, "On the Lichtenbaum-Quillen conjecture" in Algebraic K-theory and Algebraic Topology, Nato Proceedings Lake Louise **407**, Kluwer, Dordrecht, (1993),147-166.

[9] M. Kolster, T.Nguyen Quang Do and V.Fleckinger, Twisted S-units, p-adic class number formulas, and the Lichtenbaum conjectures, Duke Math.J. **84** (1996), 679-717.

[10] M. Kurihara, Some remarks on conjectures about cyclotomic fields and K-groups of Z, Compositio Math. **81** (1992), 223-236.

[11] R. Lee and R.H.Szczarba, The group $K_3(\mathbb{Z})$ is cyclic of order 48, Annals of Math. **104** (1976), 31-60.

[12] B. Mazur and A.Wiles, Class fields of abelian extensions of $\mathbb{Q}$, Invent. Math. **76** (1984), 179-330.

[13] J. Milnor, Introduction to Algebraic K-theory, Annals of Math. Study vol.72, Princeton University Press, (1971).

[14] S. Mitchell, On the Lichtenbaum-Quillen conjectures from a stable homotopy-theoretic view point, Math. Sci. Res. Inst. Publ. vol.27, Algebraic topology and its applications, Springer, (1994) , 163-240.

[15] T. Nguyen Quang Do, Sur la $\mathbb{Z}_p$-torsion de certains modules galoisiens. Ann. Inst. Fourier **36** (1986), 27-46.

[16] D. Quillen, Finite generation of the groups K_i of rings of algebraic integers, Lecture Notes in Math. vol.341, Springer Verlag, (1973), 179-198.

[17] J. Rognes, $K_4(\mathbb{Z})$ is the trivial group, Topology **39** (2000), 267-281.

[18] P. Schneider, Über gewisse Galoiscohomologiegruppen, Math. Z. **168** (1979), 181-205.

[19] C. Soulé, K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale, Invent. Math. **55** (1979), 251-295.

[20] L. Washington, Introduction to Cyclotomic Fields, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, Vol.83, Springer-Verlag, Berlin/New York, (1997).